

1. 对于递归式 $T(n) = T(2n/3) + 2^{\lceil \lg n \rceil}$, 给出 $T(n)$ 的一个渐近紧确界。
(注: $2^{\lg n} = n$)

2. 补全算法 RANDOMIZED-QUICKSORT(A 为数组)的伪代码,并分析 RANDOMIZED-QUICKSORT($A,1,n$) ($n = A.length$) 运行过程中,在最坏和最好情况下, RANDOMIZED-QUICKSORT 分别被调用了多少次? (以 Θ 符号形式给出答案)

Algorithm 1 PARTITION(A,p,r)

```
1:  $x = A[r]$ 
2:  $i = \underline{\hspace{1cm}}$ 
3: for  $j = p$  to  $\underline{\hspace{1cm}}$  do
4:   if  $\underline{\hspace{1cm}}$  then
5:      $i = i + 1$ 
6:      $A[i] \leftrightarrow A[j]$ 
7:  $A[i + 1] \leftrightarrow A[r]$ 
8: Return  $i + 1$ 
```

Algorithm 2 RANDOMIZED-PARTITION(A,p,r)

```
1:  $i = \text{RANDOM}(p,r)$ 
2:  $A[r] \leftrightarrow A[i]$ 
3: Return PARTITION( $A,p,r$ )
```

Algorithm 3 RANDOMIZED-QUICKSORT(A,p,r)

```
1: if  $\underline{\hspace{1cm}}$  then
2:    $q = \text{RANDOMIZED-PARTITION}(A,p,r)$ 
3:   RANDOMIZED-QUICKSORT( $A,p,\underline{\hspace{1cm}}$ )
4:   RANDOMIZED-QUICKSORT( $A,\underline{\hspace{1cm}},r$ )
```

3. 给定 n 个已经排好序的元素 $a_0, \dots, a_{n-1}$, 请给出时间复杂度为 $O(n)$ 的算法来判断是否存在元素对满足 $a_i = -a_j, i \neq j$ 。给出伪代码, 并说明算法的工作原理。

4. 对于图一所给的斐波那契堆, 黑色节点表示结点的 mark 属性为 true:
- 1) 抽取最小结点 (需要考虑 CONSOLIDATE 操作), 画出操作后最后的结果。
 - 2) 在 1) 的基础上, 把关键字 25 减为 3, 画出操作后的最后的结果 (需考虑级联操作)。
- Given a Fibonacci heap below. the mark attribute of black node is true:
- 1) Please give the result of extracting the minimum node (CONSOLIDATE should be considered).
 - 2) Please give the result of decrease the value of key 25 down to 3, based on the result of 1).

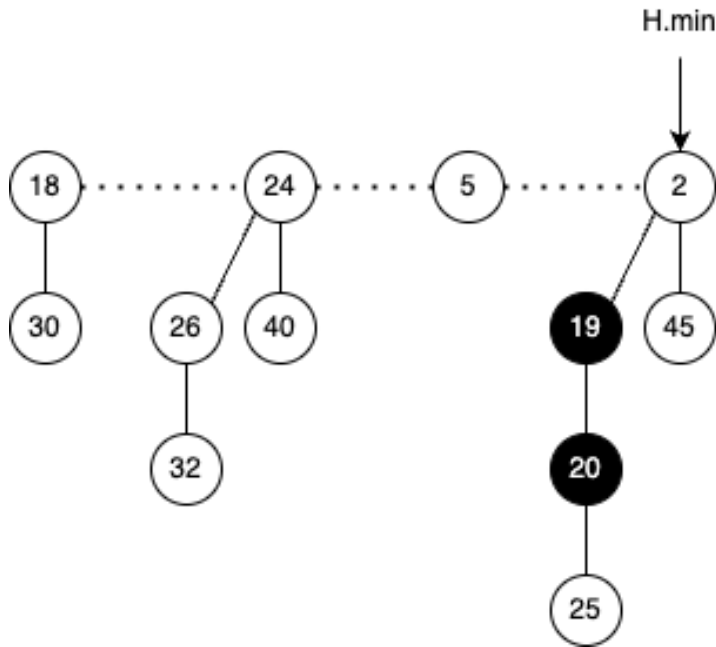


图 1: 斐波那契堆
Fig. 1 Fibonacci Heap

1. 对于递归式 $T(n) = T(n/3)/2 + T(2n/3)/2 + \lg n$, 请给出一个好的渐近上界, 并用代入法验证。

2. 有 n 个木块，大小分别为 $a_1, \dots, a_n$ ；另有 m 个大小为 V 的容器。定义一个容器被填满当且仅当其中放入了两个木块 a_i, a_j ，且 $a_i + a_j \leq V$ 。每个木块只能使用一次。请给出时间复杂度为 $O(n \log n)$ 的算法来判断是否存在一种木块分配方案，使得这 m 个容器都被填满。给出伪代码，并说明算法的工作原理。

注意，你的算法不需要输出方案，只需要输出是或者否。

3. 扩张红黑树使得它能以 $O(1)$ 的时间给出动态数集 Q 中两个最接近的数之间的差值 (MIN-GAP)。例如, $Q = \{1, 5, 9, 15, 18, 22\}$, MIN-GAP 返回 $18 - 15 = 3$, 因为 15 和 18 是 Q 中两个最接近的数。写出该数据结构并说明 MIN-GAP 如何计算。

4. 对于图一所给的斐波那契堆，黑色节点表示结点的 mark 属性为 true:
- 1) 抽取最小结点，画出操作后最后的结果（需要考虑 CONSOLIDATE(合并) 操作,）。
 - 2) 在 1) 的基础上，把关键字为 35 的节点的值降低为 4, 画出操作后的最后的结果（需考虑 CASCADING-CUT(级联切断) 操作）。

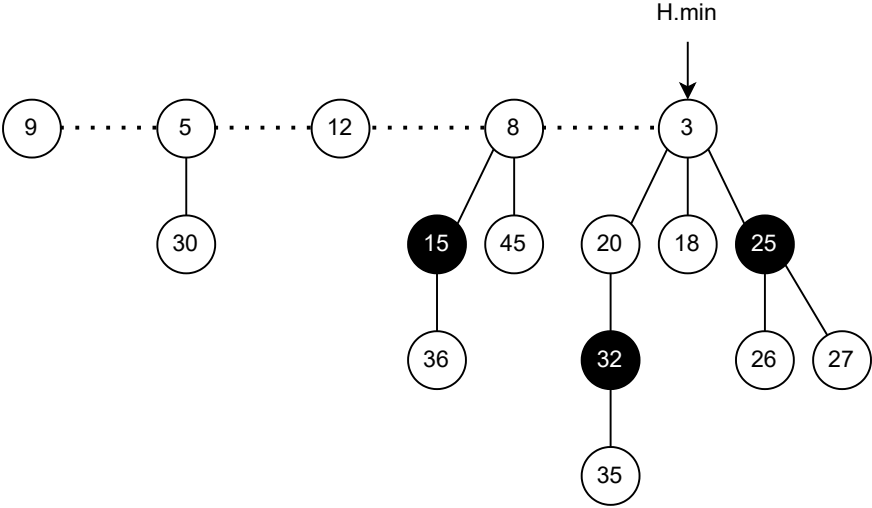


图 1: 斐波那契堆

1. 对于递归式 $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log_2 n}$, 请给出渐近确界。

2. 有一排共 n 桶染料，每桶染料的颜色用一个 $[1, n]$ 之间的数字表示。画家小 S 想要使用至少 k 种颜色作画，但是他只能使用**连续的**若干桶染料（也就是若干桶相邻的染料）。现在请你求出：他最少需要用多少桶染料，才能够满足至少 k 种颜色的要求。给出伪代码，并说明算法的工作原理。你的算法时间复杂度需要是 $O(n)$ 的，超出会酌情扣分。
- 注意，你的算法不需要考虑无解的情况。

3. 已知在一个区间集合中，被最多数量区间覆盖的点被称为最大重叠点，且它一定可以是某个区间的端点。请你简述一个数据结构的设计思路，使它能够支持动态查询一个动态区间集合中的最大重叠点（任意一个符合要求的端点即可），并分析各操作的时间复杂度。

提示：可将左端点关联 $+1$ 值，右端点关联 -1 值。

4. 对于图一所给的斐波那契堆，黑色节点表示结点的 mark 属性为 true:
- 1) 抽取最小结点，画出操作后最后的结果 (需要考虑 CONSOLIDATE(合并) 操作)。
 - 2) 在 1) 的基础上，把关键字为 30 的节点的值降低为 4, 画出操作后的最后的结果 (需考虑 CASCADING-CUT(级联切断) 操作)。

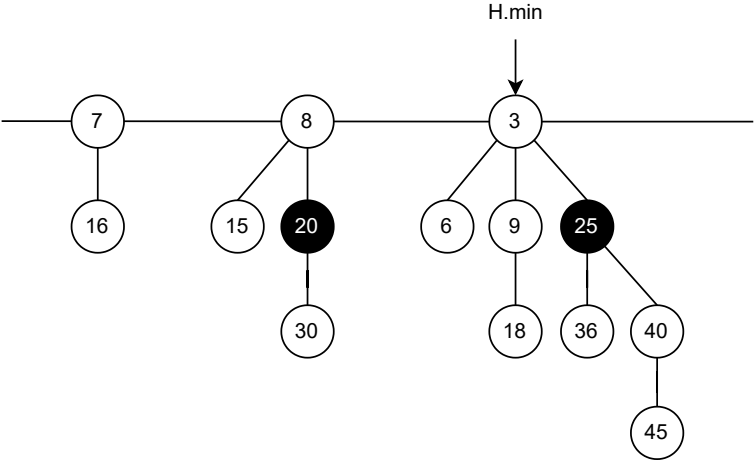


图 1: 斐波那契堆